スピン波の寿命（II）

（12月8日受理）　　　　川　村　　清（東大理）

1．　第一報で示した如く $\chi_{+-}(q,\omega_m)$ は、次の形に書ける。(イ)

$$\chi_{+-}(q,\omega_m)=\frac{\Delta^{+}(q,\omega_m)\,\Delta^{-}(q,\omega_m)}{\omega_m-\omega(q)-\Pi(q,\omega_m)} \tag{1}$$

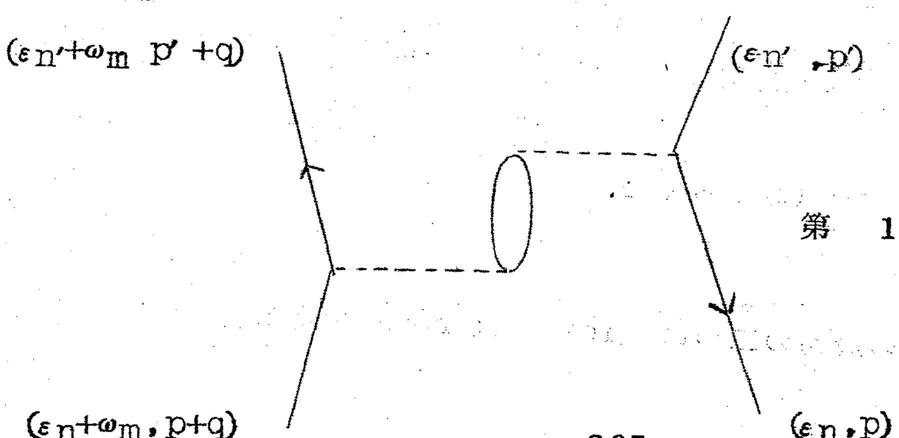
ここで $\omega(q)$ は、Hartree-Fock での spin 波の振動数、$\Pi(q,\omega_m)$ は Hartree-Fock 以外の self-energy, four vertex function の寄与を全て押込んである。$\Pi(q,\omega_m)$ の中、self-energy からの寄与は、electron-hole pair が bound state を作つて、小さな energy をもつことから $\omega_m\to\omega+i\delta$ とおいた時、その虚部は ω^3 に比例し十分低い振動数では、spin-wave の damping には効かないことを示した。この report において、$\Pi(q,\omega_m)$ への four vertex function からの寄与も、同時に $0(\omega^3)$ であることを示す。Π は、irreducible four uertex function と次の関係にある。

$$\Pi(q,\omega_m)=T^2\,\Sigma_{nn'}\,\Sigma_{pp'}\,\Delta(pq)\,\Gamma_{pp'}^{(0)}(q,\omega_m)\,\Delta(p'q) \tag{2}$$

$$\Delta(p,q)=vG_{p+q\uparrow}(\varepsilon_n+\omega_m)\,G_{p\downarrow}(\varepsilon_n) \tag{3}$$

完全な $\Gamma^{(0)}$ を使つての証明は煩雑であるから、その全てをここに示すことはやめて、その一部を demonstrote するにとどめる。詳しいことは、後の機会に譲りたいと思う。

2．$\Gamma_{pp'}^{(0)}(q,\omega_m)$ の中で第1図の様なものをとる。式で書くと



第　1　図

$$-v^2 T \Sigma_{n_1 n_2}\ G_{p_1}(\varepsilon_{n_1})\, G_{p_2}(\varepsilon_{n_2})$$

$$\delta(p_1-p_2-p+p')\ \delta(\varepsilon_{n_1}-\varepsilon_{n_2}-\varepsilon_n+\varepsilon_{n'})$$

$$=v^2 \sum_{p_1 p_2} \frac{f^+(\varepsilon_{p_1})\, f(\varepsilon_{p_2})-f(\varepsilon_{p_1})\, f^+(\varepsilon_{p_2})}{\varepsilon_n-\varepsilon_{n_1}-(\varepsilon_{p_1}-\varepsilon_{p_2})}\ \delta(p_1-p_2-p+p^1) \tag{4}$$

と書ける。

$$f(\varepsilon)=(1+e^{\varepsilon/T})^{-1}$$

$$f^+(\varepsilon)=1-f(\varepsilon)=(1+e^{-\varepsilon/T})^{-1} \tag{5}$$

(4)は

$$\int d\alpha\ \frac{A(\alpha)}{(\varepsilon_n-\varepsilon_{n'})-\alpha} \tag{6}$$

という形に書ける。(7)は $\varepsilon_n, \varepsilon_{n'}\ ;\omega_m)$ を解析接続すると、$\mathscr{I}m\,(\varepsilon-\varepsilon')=0$ の所にcutをもつ。一般に $\Gamma(\varepsilon_n, \varepsilon_{n'}\ ;\omega_m)$ を解析接続すると、

$$\begin{cases} \mathscr{I}m\,\varepsilon=0\ ,\ \mathscr{I}m\,\varepsilon'=0\ ,\ \mathscr{I}m\,\omega=0 \\ \mathscr{I}m\,(\varepsilon+\omega)=0\ ,\ \mathscr{I}m\,(\varepsilon'+\omega)=0 \\ \mathscr{I}m\,(\varepsilon-\varepsilon')=0\ ,\ \mathscr{I}m\,(\varepsilon+\varepsilon'+\omega)=0 \end{cases} \tag{7}$$

という所に(6)の様な cut がある。[2] (6) を(2)に代入すると、

$$\sum_{pp'} \frac{v}{\omega_m-\tilde{\varepsilon}_{p+q\uparrow}+\tilde{\varepsilon}_{p\downarrow}}\ \frac{v}{\omega_m-\tilde{\varepsilon}_{p'+q\uparrow}+\tilde{\varepsilon}_{p'\downarrow}}$$

$$\times\, T^2 \Sigma_{nn'} \int d\alpha\ [G_{p\downarrow}(\varepsilon_n)-G_{p+q\uparrow}(\varepsilon_n+\omega_m)]$$

$$\frac{A(\alpha)}{(\varepsilon_n-\varepsilon_{n'})-\alpha}\ [G_{p'\downarrow}(\varepsilon_{n'})-G_{p'+q}(\varepsilon_{n'}+\omega_m)] \tag{8}$$

$\omega_m \longrightarrow \omega+i\delta$ とおき、$\omega \sim \omega(q)$ とおくと、

$\varepsilon \ll \tilde{\varepsilon}_{p+q\uparrow}-\tilde{\varepsilon}_{p\downarrow}$ 故(8)の最初の二つの factor は real である。

(8)の imaginary part をとると

$$
-\Sigma_{pp'}\Big\{\Big(\mathrm{th}\,\frac{\tilde{\varepsilon}_{p+q\uparrow}-\omega}{2T}-\mathrm{th}\,\frac{\tilde{\varepsilon}_{p+q\uparrow}}{2T}\Big)-A(\tilde{\varepsilon}_{p+q\uparrow}-\tilde{\varepsilon}_{p'\downarrow}-\omega)
$$

$$
\Big(\mathrm{th}\,\frac{\tilde{\varepsilon}_{p\downarrow}}{2T}+\mathrm{cth}\,\frac{\tilde{\varepsilon}_{p+q\uparrow}-\tilde{\varepsilon}_{p'\downarrow}-\omega}{2T}
$$

$$
+\Big(\mathrm{th}\,\frac{\tilde{\varepsilon}_{p\downarrow}}{2T}-\mathrm{th}\,\frac{\tilde{\varepsilon}_{p\downarrow}+\omega}{2T}\Big)A(\tilde{\varepsilon}_{p\downarrow}+\omega-\tilde{\varepsilon}_{p'+q\uparrow})\Big(\mathrm{th}\,\frac{\varepsilon_{p'\downarrow}}{2T}
$$

$$
+\mathrm{cth}\,\frac{\tilde{\varepsilon}_{p\downarrow}+\omega-\tilde{\varepsilon}_{p'+q\uparrow}}{2T}\Big\}\cong 4\omega^2\rho_\uparrow(0)\,\rho_\downarrow(0)\,\{A(-\omega)+A(\omega)\} \tag{9}
$$

ここで

$$
\begin{cases}
\mathrm{th}\,\dfrac{\chi}{2T}-\mathrm{th}\,\dfrac{\chi+\omega}{2T}\cong 2\omega\delta(\chi)\\
\mathrm{th}\,\dfrac{\chi}{2T}-\mathrm{cth}\,\dfrac{\chi+\omega}{2T}\cong 2\omega\delta(\chi)
\end{cases} \tag{10}
$$

この様に$\omega\longrightarrow 0$で (2)の虚部を計算すると (10)の様に、« spectral function »の変数にωの入つているようなものの和になつて入つて来ることが判る。(9)では、その他、ω^2という factor がたまたま入つて来ているが、一般にはωという factor の入るところもある。

3 . spectral function $A(-\omega)$,$A(\omega)$は、$0(\omega)$であることを次に証明する。

(4)から

$$
A(\pm\omega)=v^2\Sigma_{p_1p_2}\,[f^+(\varepsilon_{p_1})\,f(\varepsilon_{p_2})-f(\varepsilon_{p_1})\,f^+(\varepsilon_{p_2})]
$$

$$
\times\delta(\pm\omega-(\varepsilon_{p_1}-\varepsilon_{p_2}))\,\delta(p_1-p_2-p+p') \tag{11}
$$

$$
v^2\delta(p_1-p_2-p+p')
$$

を方向で積分すると (11)は

$$
\int d\varepsilon_{p_1}d\varepsilon_{p_2}\rho(\varepsilon_{p_1})\,\rho(\varepsilon_{p_2})\,v^2(\varepsilon_{p_1}\varepsilon_{p_2})
$$

$$
\times\ [f^+(\varepsilon_{p_1})\,f(\varepsilon_{p_2})-f(\varepsilon_{p_1})\,f^+(\varepsilon_{p_2})]\,\delta(\pm\omega-\varepsilon_{p_1}+\varepsilon_{p_2})
$$

$$
=\int d\varepsilon_1\rho(\varepsilon_{p_1})\,\rho(\varepsilon_{p_1}\mp\omega,\varepsilon_{p_2})
$$

$$\times \left[f^{+}(\varepsilon_{p_1}) f(\varepsilon_{p_1} \mp \omega) - f(\varepsilon_{p_1}) f^{+}(\varepsilon_{p_1} \mp \omega) \right] = 0(\omega)$$

それ故(9)は、ω^3に比例することになる。このω^3に比例するということは一般の diagram についてたしかめてある。第一報において、一体の Green 関数の self-energy part から来る damping も ω^3に比例することを示した。以上の議論から spin wave は長波長領域で十分長い寿命をもつことがいえた。

文　献

1)　川村　清：物性研寄　5，(1955)
2)　Eliashberg : Soviet Physics JETP. 14 ,886, (1962)